Vorbemerkung:

Mit diesem Text soll eine Einführung in die GNSS-Technologie für interessierte Laien geschaffen werden. Er wird laufend ergänzt und überarbeitet. Sofern es Fragen zu diesem Text gibt wird um eine Mail an

m.bauer-hh@t-online

gebeten.

Inhaltsverzeichnis (Stand:12. Januar 2012)

1. Einleitung

Ortsbestimmung ist seit dem Ende des 20.ten Jahrhunderts sehr leicht durchzuführen Man schaltet ein kleines Gerät ein (s. Abb. 1) und nach sehr kurzer Zeit teilt das Gerät mit, wo wir uns auf dem Erdkörper befinden. Das geht zwar nicht überall – z. B. nicht in Gebäuden – aber außerhalb von Gebäuden fast immer.

Abb. 1: GNSS Handempfänger (handheld receiver)

Die Systeme, die dies ermöglichen, tragen den Namen „Globale Navigations Satelliten Systeme“, abgekürzt GNSS. Das zur Zeit wichtigste GNSS ist das US-amerikanische Global Positioning System (GPS). Aber nicht nur die Amerikaner verfügen über ein GNSS. Das existierende russische System wird GLONASS genannt. GLONASS steht für ***GLO**bal'naya **NA**vigatsioannaya **S**putnikovaya **S**istema*. In naher Zukunft wird es ein chinesisches System mit Namen Compass und ein europäisches System mit Namen Galileo geben.

Die Funktionsweise dieser verschiedenen Systeme ist sehr ähnlich und auch in der Leistungsfähigkeit unterscheiden sie sich kaum.

Gemeinsam ist den GNSS, das sie passive Systeme sind. Der Nutzer eines GNSS verrät nicht, wo er sich aufhält. Er kann also auch nicht belauscht werden oder überwacht werden. Der Nutzer e*mpfängt* lediglich mit Hilfe eines Empfängers Satellitensignale und kann daraus seine Position und Geschwindigkeit berechnen. Zusätzlich bekommt er eine Zeitinformation. Man kann auch formulieren: Ein GNSS beantwortet die Fragen:

1. Wo bin *ich*?
2. Wie schnell bewege *ich* mich?
3. Wie spät ist es?

Diese Informationen bleiben prinzipiell beim Empfänger. Das schließt nicht aus, dass in vielen Fällen die Weitergabe dieser Informationen an Dritte nützlich sein kann und auch erfolgt. Dazu sind aber Einrichtungen erforderlich, die von dem originären GNSS nicht zur Verfügung gestellt werden.

Auf der anderen Seite soll schon hier festgehalten werden, dass die GNSS nur die obigen drei Fragen beantworten. Sie beantworten z. B. nicht die Frage, auf welchem Wege komme ich zu einem Ziel. Zwar ist in den meisten GNSS-Empfängern die Fähigkeit zu Beantwortung dieser Frage integriert, eine GNSS-Fähigkeit ist dies aber nicht.

In diesem Text soll nur versucht werden, die Grundprinzipien der GNSS-Ortung so einfach wie möglich zu beschreiben, wann immer möglich ohne mathematische Formeln.

2. Prinzip der GNSS Ortung

GNSS-Satelliten fliegen in nahezu kreisförmigen Bahnen in rd. 23.000 km Höhe über der Erdoberfläche. Sie bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von rd. 14.000 km/Stunde. Trotz dieser hohen Geschwindigkeit ist die Position der Satelliten zu jedem beliebigen Zeitpunkt bekannt bzw. berechenbar. Wir kommen darauf später noch zurück.

Das Prinzip der Ortsbestimmung soll zunächst an einem vereinfachten Modell erläutert werden (s. Abb. 2). Wir gehen einmal davon aus, dass sich Satelliten und Satellitenempfänger in einer Ebene befinden. Wenn nunmehr mit Hilfe des Satellitenempfängers zu **einem** Satelliten bekannter Position die Entfernung d1 gemessen wird kann sich der Empfänger auf jedem Punkt des Kreises mit Radius d1 und dem Satelliten als Kreismittelpunkt befinden. Das reicht also nicht zur Positionsbestimmung. Wenn wir die gleiche Messung zu einem **zweiten** Satelliten bekannter Position durchführen, erhalten wir einen zweiten Kreis. Der Empfänger muss sich auf beiden Kreisen befinden, also dort, wo sich die Kreise schneiden. Die Kreise schneiden sich aber in zwei Punkten. Beide Punkte könnten die Empfängerposition sein. Das dadurch sich ergebende Problem können wir dadurch lösen, dass wir einen der beiden möglichen Empfängerpositionen ausschließen können, weil er weit im Weltraum liegt.

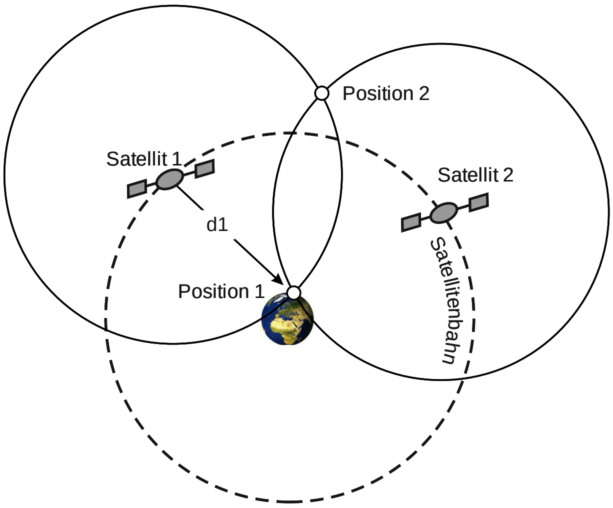


Abb. 2: Grundprinzip der Satellitenortung (2-D-Modell)

Nun ist die Welt aber nicht zwei- sondern dreidimensional. Das bedeutet, dass wir durch die Messung einer Strecke zu einem Satelliten nur wissen, dass sich der Empfänger irgendwo auf einer **Kugel** mit dem Radius d1 befinden muss. Durch Messung einer zweiten Strecke zu einem zweiten Satelliten ergibt sich als weiterer geometrischer Ort für den Empfänger eine **zweite Kugel**. Der Empfängerort liegt auf beiden Kugeln, d.h. dort, wo sich die beiden Kugeln schneiden. Das ist ein Kreis, der auf beiden Kugeln liegt (s. Abb. 3). Damit ist klar, dass wir mit zwei Satelliten noch keine eindeutige Ortsbestimmung durchgeführt haben.

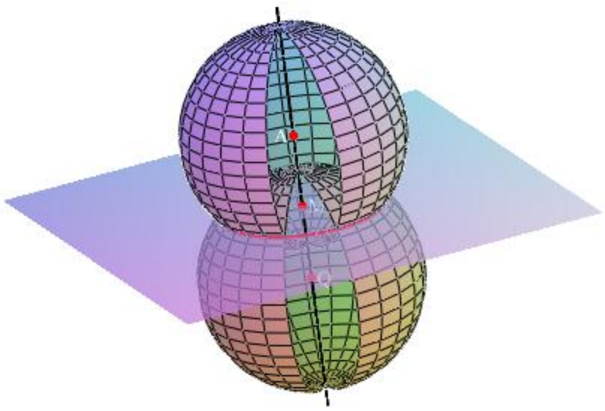
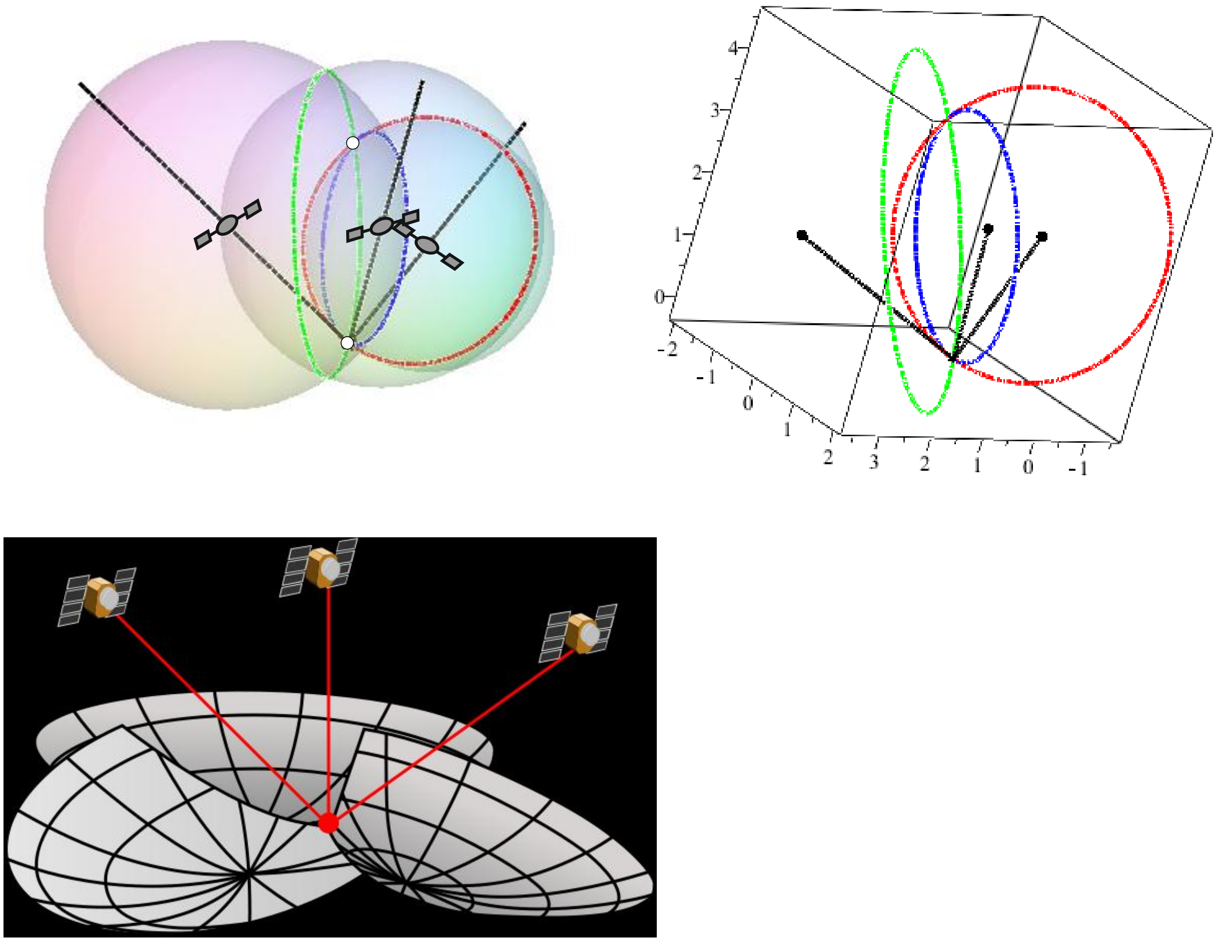


Abb. 3: Schnitt von zwei Kugeln

Das Problem wird dadurch gelöst, dass wir eine Entfernungsmessung zu einem dritten Satelliten durchführen. Damit steht uns eine dritte Kugel als geometrischen Ort für den Empfänger zur Verfügung, der Empfänger befindet sich auf jeder dieser Kugeln, also dort, wo sich die drei Kugeln schneiden (s. Abb. 4).



(© Wikipedia) http://de.wikipedia.org/wiki/Globales_Navigationssatellitensystem

Abb. 4 Satellitenortung mit Entfernungsmessung zu drei Satelliten

Man sieht in der Abbildung, dass es auch in diesem Fall zwei Orte gibt, in denen sich die drei Kugeln schneiden, die also theoretisch als Ort des Satellitenempfängers in Frage kommen. Es liegt also auch hier eine Mehrdeutigkeit vor. Aber ebenso wie in dem 2-D-Modell (s. Abb. 2) kann man auch hier einen der beiden Orte als unrealistisch ausschließen.

Damit ist das Grundprinzip der GNSS-Ortung beschrieben. Es gibt aber noch eine nicht unwesentliche Einschränkung. Dies hängt mit der Art der Entfernungsmessung zusammen und führt dazu, dass wir nur theoretisch mit drei Satelliten eine Ortung durchführen können. In der Realität benötigen wir grundsätzlich immer mindestens 4 Satelliten. Wir kommen auf dieses Problem weiter unten zurück.

Applets

http://www.univie.ac.at/netscience/html/nets/gps/applets/fritz/index.htm

3. Prinzip der Streckenmessung

Wir wollen das Prinzip, mit dem bei den GNSS die Strecken vom Satellit zum Satellitenempfänger gemessen werden, ein wenig genauer betrachten, weil dies zum weiteren Verständnis wichtig ist. Dazu machen wir ein Gedankenexperiment (s. Abb. 4).

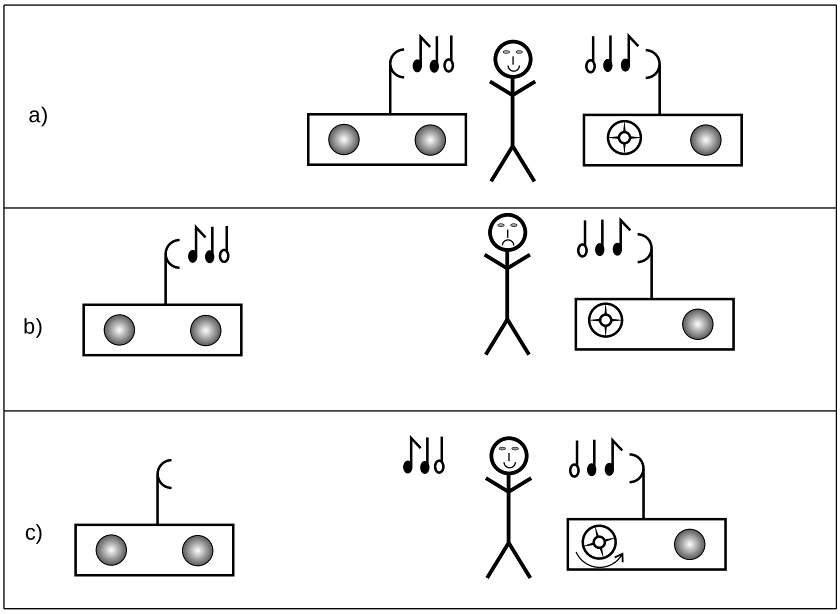


Abb. 5: Prinzip der GNSS-Streckenmessung

Eine Person möge zu Beginn des Experiments genau in der Mitte zwischen zwei exakt synchronisierten Tonbandgeräten stehen (Abb. 5a). Beide Geräte spielen die gleiche, sich immer wieder wiederholende Melodie. Die genau in der Mitte Person hört von beiden Geräten die Melodie zum gleichen Zeitpunkt und hat damit einen ungestörten Hörgenuss. Im nächsten Schritt soll eines der beiden Geräte in einiger Entfernung von der Person aufgebaut werden (Abb. 5b). Wir ignorieren, dass das weiter entfernt stehende Gerät nur noch ganz leise zu hören sein wird. Jedenfalls wird jetzt die Person die von den Geräten ausgestrahlte Melodie zu unterschiedlichen Zeiten hören. Das ist dann kein Hörgenuss mehr. Aber das Problem kann gelöst werden. An dem Gerät, in dessen Nähe der Hörer steht, gibt es einen Drehknopf. Mit dessen Hilfe kann die Erzeugung der sich wiederholenden Melodie im Gerät in der Nähe der Person so zeitlich verzögert werden kann, dass beide Melodien wieder gleichzeitig bei der Person ankommen (Abb. 5c). An dem Drehknopf befindet sich eine Skala, an der wir ablesen können, um welche Zeit, die Erzeugung der Melodie in dem bei der Person stehenden Tonbandgerät verzögert werden musste, damit die Melodien der beiden Tonbandgeräte wieder gleichzeitig bei der Person ankommen. Wir unterstellen einmal, dass die Erzeugung um 1 Sekunde verzögert werden muss. Die Geschwindigkeit, mit der sich Schall in der Luft ausbreitet, beträgt etwa 343 Meter pro Sekunde. Daher wissen wir jetzt, dass die Entfernung zwischen den beiden Geräten 343 Meter ist ($1\ s \cdot \frac{343\ m}{s} = 343\ m$).

Nach diesem Prinzip funktioniert auch die Entfernungsmessung bei den GNSS. Nur haben wir es nicht mit Tonbandgeräten, Schall und dem Mensch als Hörer zu tun sondern mit

- Satelliten die ein elektromagnetisches Signal aussenden, so wie das etwa Radiosender machen,
- Satellitenempfängern, die das im wesentlich gleiche Signal erzeugen wie der Satellit und die über die Fähigkeit verfügen, das im Empfänger erzeugte Signal so zu verzögern, dass es mit dem von dem Satelliten kommenden Signal übereinstimmt.

Die GNSS-Satelliten senden zu festgelegten Zeitpunkten ein sich immer wiederholendes elektromagnetisches Signal aus, dem eine bestimmte Information auf moduliert ist. Wir können uns das so vorstellen, als ob ein Radiosender eine immer sich wiederholende Melodie aussendet. Auch wenn wir diese Melodie mit Hilfe eines Radioempfängers hören können, so wird haben wir es nicht mit dem Aussenden von Schall, der sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet zu tun, sondern um die Ausbreitung von elektromagnetischen Signalen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Der Satellitenempfänger erzeugt dieses Signal zunächst zu dem gleichen Zeitpunkt, zu dem dies auch der Satellit tut. Wenn auch die Lichtgeschwindigkeit sehr groß ist, so braucht das Satellitensignal doch eine gewisse Zeit, um vom Satelliten zum GNSS-Empfänger zu gelangen (etwa 0,067 Sekunden). Der Satellitenempfänger vergleicht dieses vom Satelliten kommende Signal mit dem Signal, welches er selbst erzeugt und „merkt", dass die beiden Signale zeitlich gegeneinander versetzt sind. Er kann dann die Erzeugung seines eigenen Signals so lange verzögern, bis beide Signale zeitlich übereinstimmen. Der Empfänger hält fest, wie groß der Zeitunterschied ΔT zwischen dem Empfang des Satellitensignals und der Erzeugung seines eigenen Signals ist. Durch Multiplikation dieses Zeitunterschieds mit der Lichtgeschwindigkeit v wird dann die Entfernung Satellit- Satellitenempfänger gerechnet ($S = \Delta T \cdot v$).

4. Realisierung der Streckenmessung.

4.1 Erforderliche Genauigkeit

Wir wollen wir uns einmal anschauen, wie genau die Zeitmessung und die daraus abgeleitete Strecke sein muß. Das hängt davon ab, wie genau wir die Ortung durchführen wollen. Moderne, einfache GNSS-Empfänger bestimmen ihren Ort mit einer Genauigkeit von etwa 10 Metern. Vereinfacht bedeutet dies: der wahre Empfängerort und der vom GNSS-Empfänger gerechnete Empfängerort können etwa 10 Meter auseinander liegen.

Wir unterstellen einmal, dass zum Erreichen dieser Ortungsgenauigkeit auch die Entfernungsmessung etwa 10 Meter genau sein muss: die Differenz zwischen gemessener Strecke und der tatsächlichen Strecke soll also nicht größer als 10 Meter sein.

Bekanntlich gilt: $Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$ bzw. $Weg = Geschwindigkeit \cdot Zeit$

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt rd. $300\,000 \frac{km}{Sekunde}$. Wenn wir also bei der Zeitmessung einen Fehler von 1 Sekunde machen würden, müssten wir mit einem Fehler für die Strecke von 300 000 km rechnen. Das ist offensichtlich nicht akzeptabel. Wir erhöhen jetzt mal die Ansprüche an die Genauigkeit der Zeitmessung und schauen uns die dabei sich ergebenden Streckenfehler an (Tabelle 1).

Zeitfehler	Streckfehler
1 Sekunde = 1 s	300 000 km
$\frac{1}{1000}\ s = 1\ Millisekunde = 1ms = 0{,}001\ s$	$\frac{300\,000\ km}{1000} = 300\ km$
$\frac{1}{1000} ms = 1\ Mikrosekunde = 1\ \mu s = \ 0{,}000\,001\ s$	$\frac{300\ \ km}{1\,000} = 0{,}3\ km = 300\ m$
$\frac{1}{1000}\ \mu s = 1\ Nanosekunde = 1ns = 0{,}000\,000\,001\ s$	$\frac{300\ m}{1000} = 0{,}3\ m$
$33\ ns = 0{,}000\,000\,033\ s$	$0{,}3\ m * 33 \approx 10\ Meter$

Tabelle 1: Zeitfehler, Streckenfehler

Die Tabelle zeigt, dass für eine Streckenmessgenauigkeit von 10 Meter Satellitenempfänger Uhren haben müssten, die auf etwa 33 ns = 0,000 000 033 Sekunden genau gehen[1]. Derartig genaue Uhren gibt es zwar (s. dazu z. B. http://de.wikipedia.org/wiki/Atomuhr), sie sind aber nicht nur relativ groß (s. Abb. 6), sondern auch sehr teuer. Preislich erschwingliche GNSS-Empfänger können damit nicht gebaut werden. Es muß also nach einer anderen Lösung gesucht werden.

[1] Dies Uhr würde erst nach rd. 30 Jahren 1 Sekunde vor- oder nachgehen.
[2] Ein Galileo Satellit kostet rd. 40 Millionen Euro

	
Rubidium Frequenzstandard Fehler weniger als 10 ns pro Tag. Gewicht: 3,3 kg, Volumen 2.4 Liter	*Wasserstoffmase*r Fehler: weniger als 1 ns pro Tag Gewicht: 18 kg, Volumen: 45 Liter

Abb. 6: hochgenaue Uhren

3.2 Realisierung der erforderlichen Streckenmessgenauigkeit

Bevor erklärt wird, wie das im vorangehenden Abschnitt geschilderte Problem gelöst wird, soll etwas genauer beschrieben werden, welche Konsequenzen sich bezüglich der Zeit- bzw. Streckenmessungen aus einem Uhrenfehler ergeben. Das soll an Hand eines weiteren Gedankenexperiments versucht werden.

In dem Experiment wollen wir ermitteln, wie lang die Eisenbahnstrecke zwischen München und Hamburg ist. Dazu schicken wir in München um exakt 12:00 Uhr einen Zug, der mit genau 100 km pro Stunde fährt, auf die Strecke Der Zug möge um Punkt 20:00 Uhr in Hamburg ankommen. Sofern die Uhren in München und Hamburg übereinstimmen, wissen wir, dass der Zug 8 Stunden unterwegs war und damit die Strecke 800 km lang ist ($\frac{100\,km}{h} \cdot 8\,h = 800\,km$).

Nun nehmen wir an, dass die Uhr in München genau geht, die Uhr in Hamburg aber einen Fehler hat. Sie möge um 5 Minuten vorgehen. Dann lesen wir bei Ankunft des Zuges in Hamburg die Zeit 8 Uhr und 5 Minuten ab. Wenn wir nicht wissen, dass die Uhr in Hamburg 5 Minuten vorgeht, schließen wird daraus, dass die Strecke München Hamburg länger als 800 Kilometer ist. Genau so verhält es sich bei der Messung der Strecke Satellit-Satellitenempfänger. Wir müssen damit rechnen, dass die Uhr im Satelliten*empfänger* vor- oder nachgeht. Wir kennen aber nicht um welchen Betrag die Uhr falsch geht.

Abb. 7*:* GPS Satellit in der Montagehalle und im Weltraum

GNSS-Satelliten sind hochkomplexe, teure[2] Geräte mit einem Gewicht von rd. einer Tonne. Die Abb. 7 zeigt einen GPS Satelliten bei der Montage und im Weltraum. Mit der Abbildung soll eine Vorstellung von der Größe eines GNSS-Satelliten vermittelt werden.

Ein wesentlicher Baustein der GNSS-Satelliten und auch wesentlicher Kostenfaktor sind deren hochgenaue, sehr teure Uhren. Für unsere Betrachtungen können wir diese Uhren als fehlerfrei ansehen.

[2] Ein Galileo Satellit kostet rd. 40 Millionen Euro

Der Satellit sendet demnach das Signal exakt zu dem Zeitpunkt, der vereinbart ist. Als Beispiel – wenn auch unrealistisch – soll alle 5 Minuten ein Signal abgesendet werden. Auch der Empfänger erzeugt immer zu diesem verabredeten Zeitpunkt das im wesentlichem gleiche Signal. Das ist die Situation aus der Abb. 3 b. Da aber die Uhr des Satellitenempfängers nicht fehlerfrei ist, wird das Signal im Empfänger nicht pünktlich, sondern um einen Wert Δt zu spät oder zu früh erzeugt. Unterstellen wir mal, dass die Empfängeruhr eine Minute vorgeht[3]. Unabhängig davon nimmt der Empfänger das Satellitensignal *einige Zeit nach dessen* Absendung vom Satelliten wahr: im Empfänger erzeugtes Signal und vom Satelliten kommendes Signal sind in jedem Fall *zeitversetzt*. Die Laufzeit des Satellitensignals möge 10 Minuten sein. Der Empfänger verzögert nun die Erzeugung seines Signals so lange, bis im Empfänger erzeugtes und im Empfänger empfangenes Signal übereinstimmen. Der Satellitenempfänger hat aber nun mit der Erzeugung des Signals 1 Minute zu früh begonnen (die Empfängeruhr geht ja vor!). Er muß daher die Signalerzeugung im Empfänger nicht um 10 Minuten sondern um 10 Minuten + 1 Minute = 11 Minuten zurückverlegen um zu erreichen, dass das vom Satelliten kommende Signal mit dem im Empfänger erzeugten Signal übereinstimmt. Die Zeit, um die die Signalerzeugung im Empfänger verzögert wird, nennen wir ΔT (in dem Beispiel 11 Minuten). Da in dem Empfänger die Uhr aber vor geht - da wir mit dem *Empfängeruhrenfehler* Δt rechnen müssen – ist die Verzögerungszeit ΔT nicht die Zeit, die das Signal gebraucht hat um vom Satelliten zum Empfänger zu gelangen. Die daraus abgeleitete Strecke $S = \Delta T \cdot v$ (v ist die Geschwindigkeit mit der sich das Signal ausbreitet) ist nicht die tatsächliche Strecke zwischen Satellit und Satellitenempfänger. Sie wird *Pseudostrecke* genannt. Zur Berechnung der wahren Strecke muss die Pseudostrecke bezüglich des Empfängeruhrenfehlers korrigiert werden. Wir müssen also rechnen $S = \Delta T \cdot v + \Delta t \cdot v$. Aber leider kennen wir Δt zunächst nicht.

Wir gehen jetzt zurück zu dem 2-D-Modell der Satelliten Ortung (Abb. 2). Die Abbildung zeigt, dass wir bei der 2-D-Ortung mit exakt übereinstimmenden Uhren mit 2 Satelliten auskommen. Einen Fehler in der Streckenmessung können wir aber nicht erkennen.

Nun nehmen wir an, dass es einen dritten Satelliten gibt und dass auch diese Streckenmessung fehlerfrei ist. Dann ergibt sich die in der Abb. 8 a dargestellte Situation. Der Empfänger muß sich auf allen drei Kreisen befinden. Also dort wo sich die drei Kreise in einem Punkt schneiden. Da wir aber davon ausgehen müssen, dass die gemessenen Strecken um einen unbekannten konstanten Betrag zu groß oder zu klein sind - dass wir es mit *Pseudostrecken* zu tun haben - schneiden sich die aus den Pseudostrecken abgeleiteten gestrichelten drei Kreise nicht in einem Punkt (s. Abb. 8 b, Abb. 8 c). Die Abb. 8 c zeigt aber zugleich die Lösung des Problems. Wenn wir alle drei Pseudostrecken um einen bestimmten Betrag Δs verändern schneiden sich alle Kreise wieder in einem Punkt. Damit haben wir die richtige Lösung. Wir werden später noch sehen wie das umgesetzt wird. Aber wir können schon jetzt erkennen, dass wegen des Empfängeruhrenfehlers 2 Satelliten für die 2-D-Lösung nicht ausreichend sind. Wir benötigen einen weiteren Satelliten um über die Möglichkeit zu verfügen, den Empfängeruhrenfehler zu kompensieren.

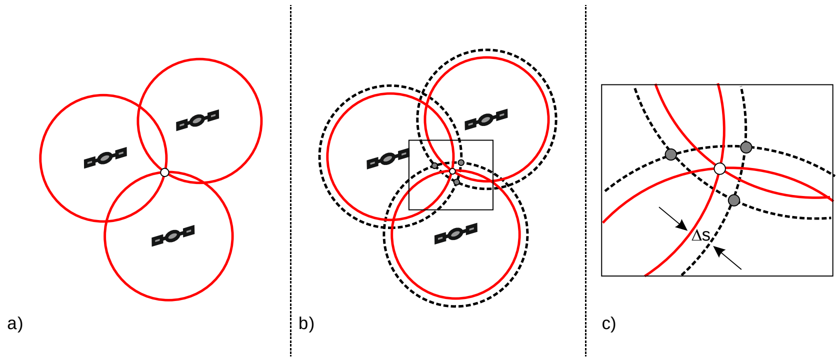


Abb. 8: Realisierung der GNSS-Streckenmessgenauigkeit

Entsprechendes gilt auch für die 3-D-Ortung. Wären die Streckenmessungen fehlerfrei, so würden uns die sich in einem Punkt schneidenden 3 Kugeln (s. Abb. 4) die richtige Position liefern. Da wir aber nur über Pseudostreckenmessungen verfügen – Strecken mit einem unbekannten für alle Strecken gleichen Fehler - benötigen wir einen vierten Satelliten um den Empfängeruhrenfehler kompensieren zu können.

[3] In der Realität ist unbekannt, welchen Betrag dieser *Empfängeruhrenfehler* Δt annimmt

5. Mathematische Beschreibung der GNSS-Ortung

Einleitend war ausgeführt worden, dass die GNSS unter weitgehendem Verzicht von mathematischen Formeln beschrieben werden soll. Doch soll hier jetzt mal eine Ausnahme gemacht werden. Wer die Mathematik nicht mag oder mit seinen Mathematikkenntnissen noch nicht so weit ist, möge diesen Abschnitt überspringen.

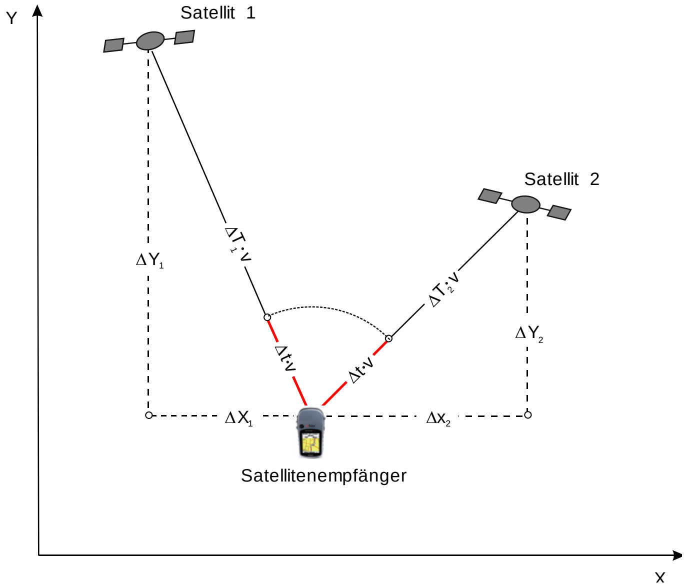


Abb. 9: Mathematische Beschreibung der GNSS-Ortung (2-D-Modell)

In der Abb. 9 sind zwei Satelliten und ein Satellitenempfänger in einem rechtwinkligen X,Y-Koordinatensystem dargestellt. Wir können davon ausgehen, dass die X,Y-Koordinaten der Satelliten bekannt sind. Unbekannt sind dagegen die Koordinaten des Empfängers. Unter Anwendung der in den vorangehenden Abschnitten geschilderten Prinzipien hat der Satellitenempfänger die Zeitdifferenzen ΔT_1 und ΔT_2 zwischen der Aussendung der Satellitensignale und deren Empfang im Empfänger gemessen. Wegen des unbekannten Empfängeruhrenfehles ergibt sich aber aus den Produkten $\Delta T * v$ nicht die Strecken zwischen den Empfängern und dem Satelliten. Die tatsächlichen Strecken erhalten wir durch folgende Formel:

$$S_{Empfänger}^{Satellit} = \Delta T \cdot v + \Delta t \cdot v \tag{1}$$

Dabei ist Δt der Empfängeruhrenfehler und v die Geschwindigkeit des Satellitensignals.

Unter Verwendung des Satz des Pythagoras können wir aus der Abb. 9 folgende Gleichungen ablesen:

$$(\Delta Y_1)^2 + (\Delta X_1)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{2}$$
$$(\Delta Y_2)^2 + (\Delta X_2)^2 = (\Delta T_2 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{3}$$

Zur Klarstellung schreiben wir die Koordinatenunterschiede ΔY, ΔX der Gleichungen (1), (2) ein wenig anders

$$\Delta Y_{Empf}^{Satellit} = Y^{Satellit} - Y_{Empfänger} \tag{4}$$
$$\Delta X_{Empf}^{Satellit} = X^{Satellit} - X_{Empfänger} \tag{5}$$

Abgekürzt geschrieben und um unterschiedlichen Satelliten berücksichtigen zu können lauten die Gleichungen (4), (5):

$$\Delta Y_E^{S\,1} = Y^{S\,1} - Y_E \tag{6}$$
$$\Delta X_E^{S\,1} = X^{S\,1} - X_E \tag{7}$$

Unter Verwendung der Schreibweise in den Gleichungen (6) und (7) schreiben wir die Gleichungen (2), (3) wie folgt:

$$(Y^{S\,1} - Y_E)^2 + (X^{S\,1} - X_E)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{8}$$

$$(Y^{S\,2} - Y_E)^2 + (X^{S\,2} - X_E)^2 = (\Delta T_2 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{9}$$

Wir haben damit zwei Gleichungen mit drei Unbekannten; Y_E, X_E (die Empfängerkoordinaten), Δt (den Empfängeruhrenfehler). Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten können wir nicht auflösen.

Also benötigen wir einen dritten Satelliten und damit folgende zusätzliche Gleichung:

$$(Y^{S\,3} - Y_E)^2 + (X^{S\,3} - X_E)^2 = (\Delta T_3 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{10}$$

Damit verfügen wir über folgende drei Gleichungen:

$$(Y^{S\,1} - Y_E)^2 + (X^{S\,1} - X_E)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{11}$$

$$(Y^{S\,2} - Y_E)^2 + (X^{S\,2} - X_E)^2 = (\Delta T_2 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{12}$$

$$(Y^{S\,3} - Y_E)^2 + (X^{S\,3} - X_E)^2 = (\Delta T_3 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{13}$$

Mit (11), (12) und (13) verfügen wir über drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die Auflösung eines derartigen Gleichungssystems ist zwar nicht ganz leicht, aber wir können uns darauf verlassen, dass die Lösung gelingt.

Nun müssen wir dieses Prinzip noch in ein 3-D-Modell übertragen. Dazu benötigen wir den „räumlichen“ Pythagoras. Dieser lautet - angewandt auf unser Problem - wie folgt (s. Abb. 10):

$$(\Delta Y_1)^2 + (\Delta X_1)^2 + (\Delta Z_1)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2$$

Dementsprechend entstehen aus den Gleichungen (11), (12) und (13) folgende Gleichungen

$$(Y^{S\,1} - Y_E)^2 + (X^{S\,1} - X_E)^2 + (Z^{S\,1} - Z_E)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{14}$$

$$(Y^{S\,2} - Y_E)^2 + (X^{S\,2} - X_E)^2 + (Z^{S\,2} - Z_E)^2 = (\Delta T_2 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{15}$$

$$(Y^{S\,3} - Y_E)^2 + (X^{S\,3} - X_E)^2 + (Z^{S\,3} - Z_E)^2 = (\Delta T_3 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \tag{16}$$

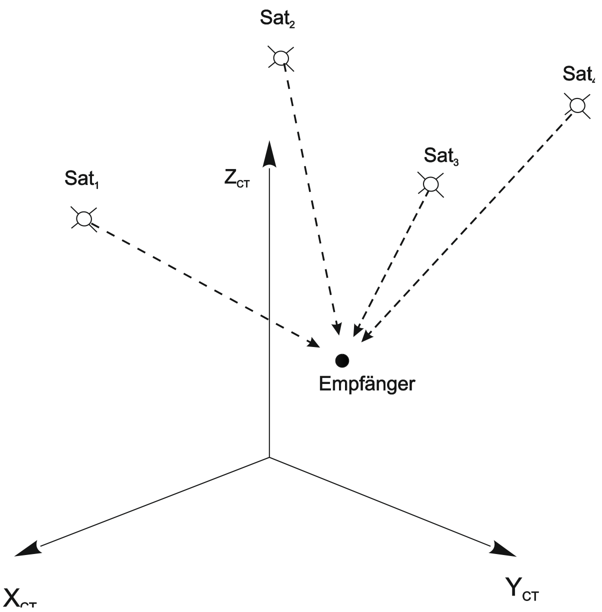


Abb. 10: Mathematische Beschreibung der GNSS-Ortung (3-D-Modell)

Wir haben es aber nun noch mit einer zusätzlichen Unbekannten zu tun: der Z-Koordinate des Empfängers. Es gibt also vier Unbekannte. Wir benötigen einen vierten Satelliten. Dann verfügen wir über die vier Gleichungen (15) – (18) mit den vier Unbekannten X_E, Y_E, Z_E, Δt. Für Mathematiker ein lösbares Problem.

$$(Y^{S\,1} - Y_E)^2 + (X^{S\,1} - X_E)^2 + (Z^{S\,1} - Z_E)^2 = (\Delta T_1 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \quad (15)$$
$$(Y^{S\,2} - Y_E)^2 + (X^{S\,2} - X_E)^2 + (Z^{S\,2} - Z_E)^2 = (\Delta T_2 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \quad (16)$$
$$(Y^{S\,3} - Y_E)^2 + (X^{S\,3} - X_E)^2 + (Z^{S\,3} - Z_E)^2 = (\Delta T_3 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \quad (17)$$
$$(Y^{S\,4} - Y_E)^2 + (X^{S\,4} - X_E)^2 + (Z^{S\,4} - Z_E)^2 = (\Delta T_4 \cdot v + \Delta t \cdot v)^2 \quad (18)$$

Wer je einen GNSS-Empfänger benutzt hat wird wissen, dass fast immer mehr als die mindestens 4 Satellitensignale empfangen werden können. Dann haben wir es mit mehr Gleichungen als Unbekannte zu tun. Die Lösung dieses Problems kann an dieser Stelle nicht beschrieben werden. Es sei nur so viel gesagt, dass in diesem Falle die „überflüssigen“ Satelliten genutzt werden, um die Genauigkeit der Ortung zu verbessern.

6. Die Position des Satelliten

In den vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, wie man mit Hilfe eines GNSS eine Ortsbestimmung durchführt. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Orte, an denen sich die Satelliten befinden bekannt sind.

Die Grundlagen für dieses Wissen stammen von dem deutschen Naturphilosophen, Mathematiker, Astronomen, Astrologen, Optiker und evangelischem Theologen Johannes KEPLER (1571 – 1630). KEPLER wertete Beobachtungen des dänischen Astronomen Tycho BRAHE (1546 – 1601) aus und entwickelte daraus die KEPLER‘schen Gesetze zur Beschreibung der Planetenbahnen. In den entsprechenden Veröffentlichungen verwendet KEPLER zum ersten Mal das lateinische Wort *satelles* („Leibwächter“, im Plural *satellites* auch „Gefolge“) für Planeten. Im heutigen Sprachgebrauch sind Satelliten aber immer von Menschenhand gebaute, um die Erde kreisende Körper. Auch für diese Satelliten gelten die KEPLER’schen Gesetze.

Abb. 10: Johannes Kepler

Es gibt drei KEPLER’sche Gesetze. Davon sollen zwei hier vorgestellt werden - angewandt auf Satelliten.

1. Satelliten *bewegen* sich auf Ellipsen (das sind „gestauchte“ Kreise) um die Erde. Die Ebene, in der sich die Satellitenbahn befindet, verläuft immer durch den Erdmittelpunkt.
2. Die Zeit, die ein Satellit benötigt, um einmal die Ellipse vollständig zu durchlaufen, ist abhängig von der großen Halbachse der Ellipse.

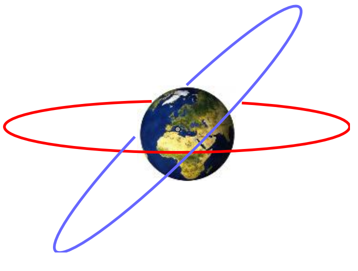


Abb. 11: Mögliche Satellitenbahnen

Aus dem ersten KELER'schen Gesetz ergeben sich zwei wichtige Erkenntnisse:

a) Satelliten, die fest am Himmel stehen, gibt es nicht. Sie würden zur Erde herabstürzen. Die Aufforderung im Krimi: „Sorgen Sie dafür, dass ein Spionagesatellit fest über Hamburg steht" ist physikalisch unsinnig.
b) Satelliten, die sich parallel zu einem Breitenkreis der Erde verlaufen, gibt es – *bis auf eine Ausnahme* - nicht. Die Ausnahme ist eine Satellitenbahnebenen die mit der Äquatorebene zusammenfällt (die rot dargestellte Bahn in der Abb. 11). In dieser Ebene verlaufen die Bahnen der Satelliten, die „scheinbar" fest am Himmel stehen. Sie tragen die Bezeichnung *geostationäre* Satelliten

Das zweite hier dargestellte Gesetz ist zunächst wenig überraschend. Da sie zum Verständnis aber nicht unwichtig ist sei die entsprechende Formel angegeben.

$$U = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{3{,}986005 \cdot 10^{14} \left[\frac{m^3}{s^2}\right]}} \qquad (19)$$

In dieser Gleichung ist U die Umlaufzeit (in Sekunden) und a die große Halbachse der Bahnellipse (in Meter). Diese Gleichung gibt uns die Möglichkeit, die Höhe eines geostationären Satelliten über der Erde zu berechnen.

Geostationäre Satelliten „sieht" einen Beobachter auf der Erde in immer gleicher Richtung. Man könnte meinen, sie stünden still. Das ist jedoch ein Trugschluß. Vielmehr durchläuft ein derartiger Satellit in genau 24 Stunden genau einmal seine *in der Äquatorebene liegende Bahn* (die rote Bahn in Abb. 11). Da aber die Erde sich in 24 Stunden einmal um sich selbst dreht, sieht der Beobachter auf der Erde den Satelliten immer in der gleichen Richtung. Diese Erkenntnis gibt uns die Möglichkeit die Höhe eines Satelliten über der Erde zu berechnen.

Dazu stellen wir Gleichung (19) nach a um und erhalten

$$a = \sqrt[3]{\frac{U^2 \cdot 3{,}986005 \cdot 10^{14}}{4 \cdot \pi^2}} \qquad (20)$$

Wenn wir diese Gleichung mit der Umlaufzeit 24 Std. = 86400 Sekunden auswerten erhalten wir den Wert 42.241 km. Dies ist die große Halbachse der Bahnellipse. Wenn wir davon den Erdradius (6.370 km) abziehen erhalten wir 35.870 km. In dieser Höhe über dem Erdkörper bewegen sich geostationäre Satelliten in einer mit der Äquatorebene zusammenfallenden Bahn. Der Beobachter sieht sie in immer gleicher Position (s. dazu: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Geostat.gif&filetimestamp=20070519182727)

GNSS-Satelliten gehören nicht zum Typ der geostationären Satelliten. Dies liegt vor allem daran, dass geostationäre Satelliten nicht von allen Punkten der Erde gesehen werden können. An den Polen stehen geostationäre Satelliten unter dem Horizont.